SEMINARIO DI ANALISI MATEMATICA
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA DELL'UNIVERSITA' DI BOLOGNA

C. PARENTI

SISTEMI IPERBOLICI E RELAZIONI DI POISSON

30 APRILE 1987

1. INTRODUZIONE

La formula di Poisson classica:

$$(1.1) \qquad \sum_{k\in Z} e^{ikt} = 2\pi \sum_{k\in Z} \delta(t-2\pi k)$$

può essere interpretata come una relazione tra lo spettro $\{k^2|k=0,1,...\}$ del laplaciano $-d^2/dx^2$ sul toro R/Z e le lunghezze $2k\pi(k=0,1,...)$ delle geodetiche periodiche del toro stesso.

Chazarain [2] e Duistermaat-Guillemin [3] hanno generalizzato la relazione (1.1) al caso di un operatore ellittico autoaggiunto e positivo $a(x,D)$ (d'ordine $m>0$) definito su una varietà C^∞ compatta e connessa $M(\partial M=\emptyset)$.

Precisamente, detti $0\leq\lambda_0\leq\lambda_1\leq...$ gli autovalori di a e definita la distribuzione

$$(1.2) \qquad S(t) = \frac{1}{2}\sum_{k\geq 0} e^{\pm i\sqrt[m]{\lambda_k}\, t} ,$$

hanno mostrato che $S\in\mathscr{S}'(R)$. Si consideri poi il campo hamiltoniano H in $T^*M\backslash 0$ definito dal simbolo principale $\sigma(a)$ di a e consideriamo le curve integrali periodiche di H; i.e. le $\gamma : R \to T^*M\backslash o$, $\dot\gamma = H\gamma$ tali che $\gamma(t+T) = \gamma(t), \forall t$ per un $T\neq 0$. Indichiamo con $\mathscr{L} = \{T|$ T periodo di una curva integrale periodica di H$\}$.
E' stato provato in [3] che si ha:

$$(1.3) \qquad \text{sing supp}(S)\subset \mathscr{L}\cup\{o\} .$$

Di più se l'insieme delle orbite chiuse di H ha "buone proprietà geometriche", è possibile provare che si ha

$$(1.4) \qquad \sum_{k\geq 0} e^{\pm i\sqrt[m]{\lambda_k}\, t} = \sum_{\ell\in\mathscr{L}\cup\{o\}} v_\ell \quad (\text{in } \mathscr{D}'(R)).$$

dove v_ℓ sono certe distribuzioni a supporto vicino ad ℓ ed aventi in ℓ una singolarità che può essere descritta.

I risultati sopra descritti possono essere facilmente estesi al caso in cui $a(x,D)$ sia un sistema NxN , $a = a^*$, $a>0$, nel caso in cui gli autovalori di $\sigma(a)$ siano distinti.

Qui ci proponiamo di provare una relazione tipo (1.3), sotto opportune ipotesi, qualora gli autovalori di $\sigma(a)$ non siano tutti distinti.

2. ENUNCIATO DEL RISULTATO

Sia M una varietà C^∞ compatta con $\partial M = \emptyset$ e sia $A(x,D) \in OPS^1(M;NxN)$ un sistema NxN di operatori pseudodifferenziali classici del 1° ordine su M.

Detta dv una densità positiva su M, supponiamo:

i) $A = A^*$ in $L^2(M;dv)$

ii) $\sigma(A)>0$ su $T^*\backslash o$, $\sigma(A)$ essendo il simbolo principale di A.

E' allora ben noto (disuguaglianza di Gärding) che il sistema ellittico A ha risolvente compatto in $L^2(M;dv)$ e lo spettro è costituito da una sequenza di autovalori:

$$-\infty < \mu_0 \leq \mu_1 \leq \dots \to +\infty$$

ripetuti con la loro molteplicità.

Poniamo, formalmente,

$$S(t) = \sum_{k\geq 0} e^{+i\mu_k t} = 2\pi \mathscr{F}^{-1}_{\mu\to t} \left(\sum_{k\geq 0} \delta(\mu-\mu_k)\right). \tag{2.1}$$

E' noto che $\{\mu_k\}$ cresce polinomialmente sicché $S(t)\in\mathscr{S}'(R)$ e ci pro-

poniamo di stimare il supporto singolare di S.

Non sappiamo farlo in generale. Il meglio che ci è riuscito finora è quanto segue.

Supponiamo che $\sigma(A)(x,\xi)$ sia diagonalizzabile e precisamente che esista $U(x,\xi)\in S^{\circ}(M;N\times N)$ (omogenea di grado 0 in ξ) tale che:

1) $\quad {}^{t}U(x,\xi) = U(x,\xi)^{-1}$

2) $\quad U(x,\xi)\sigma(A)(x,\xi)U(x,\xi)^{-1} = \Lambda(x,\xi)$, diagonale.

3) $\quad \det(\zeta-\sigma(A)(x,\xi)) = \prod_{j=1}^{\nu}(\zeta-\lambda_j(x,\xi))^{k_j}$, $\zeta\in C$, per certi interi positivi $k_1,\dots,k_\nu$ e certe funzioni reali (>0) $\lambda_j\in S^1(T^*M\backslash o)$, omogenee di grado 1.

Per ogni $i,j\in\{1,\dots,\nu\}$, $i\neq j$, poniamo $\Sigma_{i,j} = \{(x,\xi)\in T^*M\backslash o \mid \lambda_i(x,\xi)=\lambda_j(x,\xi)\}$.
Faremo l'ipotesi seguente:

3) Se per qualche i,j si ha $\Sigma_{i,j}\neq\emptyset$ allora:

(i) $\quad \{\lambda_i,\lambda_j\}\neq 0$ su $\Sigma_{i,j}$

(ii) $\quad \forall\ell\in\{1,\dots,\nu\}$, $\ell\neq i,j$, $\Sigma_{\ell,i} = \Sigma_{\ell,j} = \emptyset$.

Definiamo ora due tipi di curve in $T^*M\backslash o$.

Sia $\gamma : I = [a,b]\to T^*M\backslash o$ continua. Diremo che γ è una bicaratteristica di primo tipo se $\gamma\in C^1(I)$ e per un $j\in\{1,\dots,\nu\}$ si ha

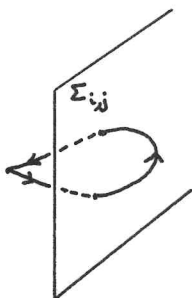
$$\frac{d}{dt}\gamma(t) = H_{\lambda_j}(\gamma(t)), \quad t\in I.$$

Diremo che γ è una bicaratteristica di 2° tipo se esiste una coppia i,j con $\Sigma_{i,j}\neq\emptyset$ ed una scomposizione finita $t_0= a<t_1<\dots<t_{n-1}<t_n=b$, $n\geq 2$, tale che:

(1) $\gamma|_{[t_{k-1},t_k]}$ è una curva integrale di H_{λ_i} o H_{λ_j} , $k=1,\dots,n$

(2) $\gamma(t_k)\in\Sigma_{i,j}$, $k=1,\dots,n-1$

Si noti che se $\Sigma_{i,j}\neq\emptyset$ e γ è una curva integrale di H_{λ_i} (o H_{λ_j}) con $\gamma(\bar t)\in\Sigma_{i,j}$ per un $\bar t$, allora $\gamma(t)\notin\Sigma_{i,j}$ per $t\sim\bar t$ come conseguenza del fatto che $\{\lambda_i,\lambda_j\}\neq 0$ su $\Sigma_{i,j}$.

bicaratteristica del 1° tipo

bicaratteristica del 2° tipo

Detto ora $\mathscr{L}$ l'insieme di periodi delle bicaratteristiche periodiche di 1° o 2° tipo, si ha:

Teorema 1. Nelle ipotesi precedenti risulta

sing supp(S)$\subset\mathscr{L}\cup\{0\}$.

Il Teorema 1 generalizza un risultato di Melrose [4].

La dimostrazione segue l'idea di [2], [3]. Consideriamo il sistema iperbolico:

$$P = I_N D_t - A(x,D) \qquad (D_t = \frac{1}{\sqrt{-1}} \partial_t)$$

Tale sistema è iperbolico simmetrizzabile e quindi esiste unica la soluzione fondamentale $E(t) \in C^\infty(R; \mathscr{D}'(MxM))$ soddisfacente:

$$(2.1) \qquad \begin{cases} PE = 0 \\ E\big|_{t=0} = \delta(x-y) \end{cases}$$

Si noti che se $\phi_k(x) \in C^\infty(M)$, $k=0,1,\ldots$ è una base ortonormale in $L^2(M,v)$ di autofunzioni per A, allora formalmente si ha:

$$(2.2) \qquad E(t,x,y) = \sum_{k\geq 0} e^{+i\mu_k t} \phi_k(x) \otimes \phi_k(y)$$

e quindi, sempre formalmente:

$$(2.3) \qquad S(t) = \int_M E(t,x,x)dv(x)$$

La giustificazione formale di (2.3) è la seguente.

Consideriale le mappe

$$\Delta : R_t \times M \to R_t \times M \times M$$

$$\Delta(t,x) = (t,x,x)$$

$$\pi : R_t \times M \to R_t$$

$$\pi(t,x) = t$$

Allora (2.3) si può interpretare come

(2.3)' $S(t) = \pi_*(\Delta^* E)$

Dove $\Delta^* : C^\infty(R_t \times M \times M) \to C^\infty(R_t \times M)$ è il pull-back

$(\Delta^* f)(t,x) = f(t,x,x)$ (restrizione alla diagonale) e

$\pi_* : C^\infty(R_+ \times M) \to C^\infty(R_t)$ è il push-forward $(\pi_* g)(t) = \int_M g(t,x)dv(x)$.

Poiché E è una distribuzione le mappe Δ^*, π_* si possono applicare in certe condizioni.

Ricordiamo che si ha:

$$(2.4) \quad \begin{cases} WF'(\Delta^*) \subset \{((t,x;\tau,\xi+\xi'),(t,x,x;\xi,\xi'))\} \in T^*(R_t \times M) \times (T^*(R_t \times M \times M)\setminus o) \\ WF'(\pi_*) \subset \{((t,\tau),(t,x;\tau,o)\} \subset (T^*R_t \setminus o) \times T^*(R_t \times M) \end{cases}$$

Occorre dunque un'informazione su $WF'(E)$, $E: \mathscr{D}'(M) \to C^\infty(R_t; \mathscr{D}'(M))$. Il punto cruciale è il teorema seguente:

<u>Teorema 2.</u> Si ha:

$WF'(E) \subset \{((o,y;\tau,\xi), (y,\xi)) | (y,\xi) \in T^*M\setminus o \ , \ (0,y;\tau,\xi) \in Ch(P)\} \cup$

$\{((t,\tilde{y};\tau,\tilde{\xi}), (y,\xi)) | (y,\xi) \in T^*M\setminus o, \ (t,\tilde{y};\tau,\tilde{\xi}) \in Ch(P), \ t \neq o \ , \exists$

una bicaratteristica di 1° o 2° tipo $\gamma: [0,|t|] \to T^*M\setminus o$, con

$\gamma(0) = (y,\xi) \ , \ \gamma(|t|) = (\tilde{y},\tilde{\xi})\} = \mathscr{R}_0 \cup \mathscr{R}_1$.

Dato per buono il Teorema 2, poiché $\tau \neq 0$ su $WF'(E)$ allora $\Delta^* E$ ha senso e quindi $\pi_*(\Delta^* E)$ perché π è submersiva.

Allora:

$$WF(S(t)) = WF(\pi_* \Delta^* E)) \subset$$

$$\subset \{(t,\tau) \mid \exists (y,\eta) \in T^*M \setminus o \mid ((t,\tau;y,\eta),(y,\eta)) \in WF'(E)\}$$

e quindi, in conclusione:

sing supp$(S) \subset \{0\} \cup \{T \in R \setminus o \mid \exists\, (y,\eta) \in T^*M \setminus o$ ed una bicaratteristica di 1° o 2° tipo γ con $\gamma(o) = \gamma(|T|) = (y,\eta)\}$.

Con ciò il Teorema 1 è provato.

La prova del Teorema 2 è a sua volta conseguenza del risultato cruciale seguente.

<u>Teorema 3.</u> Sia $u \in \mathcal{D}'(R_t \times M)$ e sia $\rho_o = (t_o, x_o, \tau_o, \xi_o) \in T^*(R_t \times M)$ con $(x_o, \xi_o) \in \Sigma_{i,j}$ (per una coppia i,j) e $\tau_o = \lambda_i(x_o,\xi_o) = \lambda_j(x_o,\xi_o)$.

Poniamo $q_i = \tau - \lambda_i(x,\xi)$, $q_j = \tau - \lambda_j(x,\xi)$ e siano $\gamma_i(s)$, $\gamma_j(s)$ le bicaratteristiche di q_i, q_j passanti per ρ_o ; i.e. $\gamma_i(o) = \gamma_j(o) = \rho_o$. Sia poi:

$$\gamma_\ell^\pm = \{\gamma_\ell(s) \mid \pm s > 0\} \ , \ \ell = i,j.$$

Se su un intorno conico Γ di ρ_o si ha:

1) $WF(Pu) \cap \Gamma = \emptyset$

2) $\forall \ell \in \{i,j\}$ e per una scelta dei segni +,-, risulta

$$\gamma_\ell^\pm \cap WF(u) \cap \Gamma = \emptyset$$

Allora $\rho_o \notin WF(u)$.

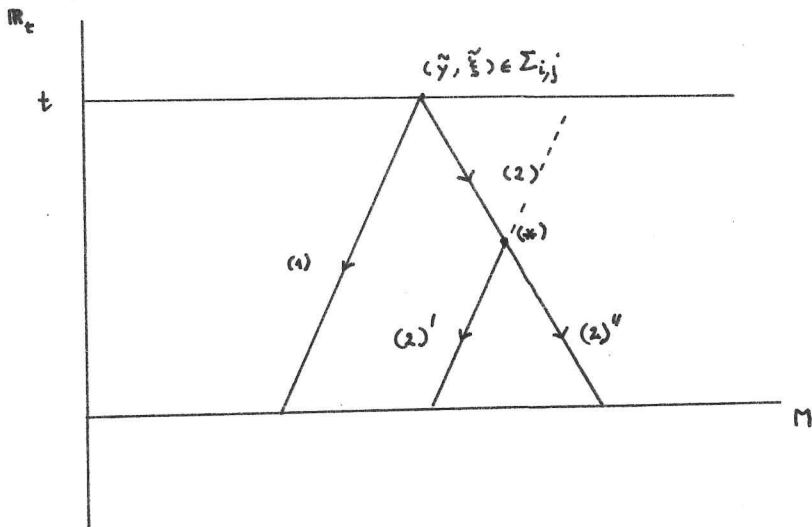
Vediamo come dal Teorema 3 segua il Teorema 2.

Basta provare che $\forall g \in \mathscr{D}'(M)$ si ha $WF(E(t)g) \subset (\mathscr{R}_0 \cup \mathscr{R}_1) \circ WF(g)$. Da un risultato di Ivrii segue che si ha:

$$\{(o,y;\tau,\xi) \mid (y,\xi) \in T^*M\backslash o\} \subset WF(E(t)g) \Rightarrow$$

$$(y,\xi) \in WF(g) \quad e \quad (o,y;\tau,\xi) \in Ch(P).$$

Rimane allora da provare che se un punto $(t,\tilde{y};\tau,\tilde{\xi}) \in Ch(P) \cap WF(Eg)$, allora tale singolarità proviene da una singolarità di g lungo una bicaratteristica di 1° o 2° tipo. Ragioniamo per t>0. Se $\tau = \lambda_i(\tilde{y},\tilde{\xi})$ e $\Sigma_{i,j} = \emptyset$ $\forall j \neq i$, allora da noti risultati di propagazione tutta la bicaratteristica nulla retrograda di $\tau-\lambda_i$ è inclusa in WF(Eg) e quindi $(\tilde{y},\tilde{\xi})$ è il punto d'arrivo di una bicaratteristica di 1° tipo che parte da un punto in WF(g).

Supponiamo ora che sia $\tau = \lambda_i(\tilde{y},\tilde{\xi})$ e $\Sigma_{i,j} \neq \emptyset$ per un j (e quindi uno solo). Muoviamoci in modo retrogrado da $(t,\tilde{y};\tau,\tilde{\xi})$ mediante curve integrali di $\tau-\lambda_i$ o $\tau-\lambda_j$. Ad es.:

Dal Teorema 3 la singolarità va su (1) o su (2) (almeno fino a (*)). Se va su (1) siamo O.K.. Poichè $(*) \in WF(Eg)$, dal Teorema 3 segue che la singolarità va su (2)' o su (2)" e quindi la tesi.

La prova del Teorema 3 è troppo lunga per essere riportata qui. Le linee essenziali sono le seguenti.

Supposto per semplicità $i=1$, $j=2$, λ_1 di molteplicità h_1, λ_2 di molteplicità h_2, ci si riduce microlocalmente ad un sistema

$$P = \begin{pmatrix} I_{h_1}(D_t - \lambda_1(x,D_x)) & \\ & I_{h_2}(D_t-\lambda_2(x,D_x)) \end{pmatrix} + B(t,x,D_t,D_x)$$

con $B \in OPS^\circ\,(R_t xM;(h_1+h_2)x(h_1+h_2))$.

Usando una trasformazione canonica che mandi $\tau-\lambda_1(x,\xi)$ in τ e tenuto conto che $\{\lambda_1,\lambda_2\} \neq 0$, ci si riduce ad un sistema del tipo

$$P = \begin{pmatrix} I_{h_1} D_t & \\ & I_{h_2}(D_t+t\psi(t,y,D_y)) \end{pmatrix} + B(t,y,D_t,D_y)$$

con B d'ordine 0.

Usando un'astuzia di Petkov [5], mediante un intertwining pseudodifferenziale ci si riduce a

$$P = \begin{pmatrix} I_{h_1} D_t & \\ & I_{h_2}(D_t+t\psi(t,y,D_y)) \end{pmatrix} + \begin{matrix} & h_1 & h_2 \\ h_1 & \\ h_2 & \end{matrix}\!\!\left(\begin{array}{c|c} 0 & L \\ \hline M & 0 \end{array}\right)$$

L, M d'ordine 0, $[D_t, M] = [D_t, L] = 0$.

Il sistema

$$\begin{cases} I_{h_1} D_t u_1 + L u_2 = f_1 \\ I_{h_2} (D_t + t\psi) u_2 + M u_1 = f_2 \end{cases}$$

diventa

$$I_{h_2} D_t (D_t + t\psi) u_2 + M D_t u_1 = D_t f_2$$

e quindi

$$I_{h_2} D_t (D_t + t\psi) u_2 - M L u_2 = D_t f_2 - M f_1$$

Mediante un'altra trasformazione canonica ci si riduce a

$$I_{h_2}(t\partial_t) - C(t,x,D_t,D_x)) v = g$$

e qui si applicano i risultati di Bove-Lewis-Parenti [1].

BIBLIOGRAFIA

[1] BOVE-LEWIS-PARENTI, Springer Lecture Notes in Math., 984 (1983).

[2] CHAZARAIN, Invent. Math., 24 (1974), 65-82.

[3] DUISTERMANT-GUILLEMIN, Invent. Math. 29 (1975), 39-79.

[4] MELROSE, Bull. Amer. Math. Soc., 81 (1975), 939-940.

[5] PETKOV, Seminari Univ. di Bologna (1982).